1. **Espacio Vectorial (V):** Conjunto de elementos (vectores, matrices, funciones) que cumplen 10 axiomas bajo la suma y la multiplicación por escalar.
2. **Subespacio (S):** Un subconjunto de V que por sí mismo es un espacio vectorial. Para probarlo, basta verificar:
   - Que el vector nulo esté en S ($0 \in S$).
   - Cerradura bajo la suma: $u + v \in S$.
   - Cerradura bajo escalar: $ku \in S$.
3. **Independencia Lineal (LI):** Un conjunto de vectores es LI si la única combinación lineal que da el vector nulo es aquella donde todos los escalares son cero.
4. **Base:** Un conjunto de vectores que es LI y además **genera** a todo el espacio.
5. **Dimensión:** La cantidad de vectores que tiene cualquier base de ese espacio.

Determine si los siguientes conjuntos, con las operaciones dadas, son espacios vectoriales.

1. El conjunto de todos los polinomios de grado exactamente 2 (P_2), con la suma usual. ¿Es espacio vectorial? (Pista: Piense en la suma de x^2 y $-x^2$).
2. El conjunto de las matrices $M_{2\times 2}$ de la forma $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$.
3. El conjunto de las funciones continuas $f(x)$ tales que $f(0) = 0$.
4. $\mathbb{R}^2$ con la suma usual pero con la multiplicación por escalar definida como: $k(x, y) = (kx, 0)$.
5. El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ simétricas ($A = A^T$).

Determine si los siguientes subconjuntos S son subespacios del espacio vectorial dado.

6. En $\mathbb{R}^3$: $S = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$.
7. En $\mathbb{R}^3$: $S = \{(x, y, z) \mid x - y = 1\}$.
8. En P_2 (polinomios de grado ≤ 2): $S = \{p(x) \mid p(0) = 0\}$.
9. En $M_{2\times 2}$: $S = \{A \in M_{2\times 2} \mid \det(A) = 0\}$.
10. En el espacio de funciones reales: $S = \{f(x) \mid f(x) = f(-x)\}$ (Funciones pares).

Analice si los conjuntos son Linealmente Independientes (LI) o Dependientes (LD).

11. En $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$, $v_3 = (2, 1, 0)$.
12. En P_2: $p_1 = x^2 + 1$, $p_2 = x - 1$, $p_3 = x^2 + x$.
13. En $M_{2\times 2}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
14. Determine el valor de k para que los vectores $\{(1, k), (k, 4)\}$ sean LD.
15. Use el **Wronskiano** para determinar si las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{2x}$ son LI.

Halle bases y determine el espacio generado.

16. Halle una base para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por el plano $2x - y + 3z = 0$.
17. Determine si el conjunto $\{(1,1),(1,-1)\}$ genera a todo $\mathbb{R}^2$.
18. Encuentre una base para el espacio de las matrices de 2×2 que son **antisimétricas** ($A = -A^T$).
19. Halle el subespacio generado por los polinomios $\{1 + x, 1 - x^2\}$.
20. Exprese el vector $v = (5, 9)$ como combinación lineal de la base $B = \{(1,2),(3,4)\}$.

Calcule dimensiones y aplique propiedades.

21. ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial $M_{3\times 2}$?
22. Halle la dimensión del subespacio $S = \{p(x) \in P_3 \mid p(1) = 0\}$.
23. Si U y W son subespacios de $\mathbb{R}^n$, enuncie la **Fórmula de Grassmann** para la dimensión de la suma $U + W$.
24. Determine la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(1,1,1,0)\}$.
25. ¿Es posible encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $(0,0,0)$? Justifique.